

Probabilités, L3

Université de Picardie Jules Verne
56, 2021

Cours 4

3 Indépendance et Conditionnement

Def. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ space probabilisé

a) 2 événements $A, B \in \mathcal{A}$ sont dits **indépendants** si

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

b) Les événements $(A_i)_{i \in I}$, $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \in I$,

sont dits **indépendants** si $\forall J \subset I$ finie,

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Prop. si A et B sont indépendants, $(A, B^c), (A^c, B), (A^c, B^c)$ sont indépendants.

Exemples. a) on tire 4 fois un dé

S. A_i , $i=1, \dots, 4$, est un événement qui ne dépend que du i -ème tirage, alors $(A_i)_{i=1, \dots, 4}$ sont indépendants.

b) $\Omega = \llbracket 1, \dots, 4 \rrbracket$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, P proba uniforme

Alors $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 3\}$ sont 2 à 2

indépendants $\left(P(A \cap B) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} = P(A) P(B) \text{ etc} \right)$

mais A, B, C ne sont pas (mutuellement) indépendants

$\left(P(\underbrace{A \cap B \cap C}_{\emptyset}) = 0 \text{ mais } P(A) P(B) P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \right)$.

Def. . . A, B 2 événements avec $P(A) > 0$

La probabilité conditionnelle de B sachant A est $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Prop. . . Supposons $P(A) > 0$

a) A, B indépendants $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$

b) $P(\cdot|A)$. $A \rightarrow [0,1]$ est une proba sur A , appelée proba conditionnelle sachant A
 $B \mapsto P(B|A)$

dém. . . a) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ donc $P(B|A) = P(B)$
 $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) P(B)$

b) . Si $B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \in \mathcal{A}$ donc $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A)$
 et $P(B|A) \in [0, 1]$

(P1) . $P(\Omega | A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

(P3) . soit $(B_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ t.q. $\forall m \neq n \in \mathbb{N}$, $B_m \cap B_n = \emptyset$

Alors $\forall m \neq n \in \mathbb{N}$, $(A \cap B_m) \cap (A \cap B_n) = \emptyset \Rightarrow P\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \cap A\right) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \cap A)\right)$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} P(B_n \cap A)$$

 donc $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \mid A\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{P(B_n \cap A)}{P(A)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(B_n | A)$ ■

Prop.. (proba. composées)

↳ $(A_i)_{i=1, \dots, n}$ sont des événements t.q. $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$,

donc $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$.

Dém. récurrence sur $n \geq 2$

• $n = 2$. $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P(A_2 | A_1)$ par définition.

• Si vrai pour $n \geq 2$ montrons le pour $n+1$. Soit $(A_i)_{i=1, \dots, n+1}$ t.q. $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$.

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}) = P(A_1 \cap \dots \cap A_n) P(A_{n+1} | A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

$$P(A_1) P(A_2 | A_1) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \text{ par H.R.} \quad \blacksquare$$

Prop. Soit $(B_i)_{i \in I}$ partition fine ou dénombrable de Ω , t.q. $B_i \in \mathcal{A}$ et $P(B_i) > 0$, $\forall i \in I$. Alors $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A | B_i) P(B_i)$$

dém. Dans ce cas, les $(A \cap B_i)_{i \in I}$ forment une partition de A

$$\left(\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) &= \underbrace{\left(\bigcup_{i \in I} B_i \right)}_{\Omega} \cap A = A \text{ et } (A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) \subset \underbrace{(B_i \cap B_j)}_{=\emptyset} \\ &\text{pour } i \neq j \in I \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } P(A) &= P\left(\bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)\right) = \sum_{i \in I} P(A \cap B_i) \\ &= \sum_{i \in I} P(A|B_i) P(B_i) \\ &\quad (\text{car } P(B_i) > 0, \forall i \in I) \end{aligned}$$

Prop.. (théorème de Bayes)

Soit $(B_i)_{i \in I}$ partition finie ou dénombrable de Ω tq $P(B_i) > 0, \forall i \in I$

Also $\forall A \in \mathcal{A}$ t.q. $P(A) > 0$, on a. $\forall i \in I$,

$$P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i) P(B_i)}{\sum_{j \in I} P(A | B_j) P(B_j)}$$

Dém. Comme $P(A) > 0$, on a $P(B_i | A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A | B_i) P(B_i)}{P(A)}$.
 $P(B_i) > 0, \forall i \in I$

Mais d'après la proposition précédente, on peut réécrire le dénominateur.

$$P(A) = \sum_{j \in I} P(A | B_j) P(B_j). \quad \left(\text{car } P(B_j) > 0, \forall j \in I \right)$$



Boul. Cantelli

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace probabilisé, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'événements ($A_n \in \mathcal{A}, \forall n \geq 0$)

Probabilité qu'une infinité d'entre eux se produise?

$\leadsto Z := \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ variable aléatoire

$\bar{A} := \{Z = +\infty\} = \{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) = +\infty\} \leadsto P(\bar{A})?$

Def. $\left(\underbrace{\bigcup_{k \geq n} A_k}_{B_n} \right)_{n \geq 0}$ st décroissante ($B_{n+1} \subset B_n, \forall n \geq 0$)

$\leadsto$ on peut considérer sa limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k$

Prop. $\overline{A} = \limsup_n A_n$

dim. $\forall \omega \in \Omega, \omega \in \limsup_n A_n \iff \omega \in \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k$

$$\iff \forall n \geq 0, \exists k \geq n \text{ t. q. } \omega \in A_k$$

$$\iff \left\{ n : \omega \in A_n \right\} \text{ est infini}$$

$$\iff \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = +\infty$$

$$\iff \omega \in \overline{A} \quad \blacksquare$$

Théorème (Lemme de Borel-Cantelli) $= P\left(\limsup_n A_n\right) = \text{Proba qu'une infinité de } A_n \text{ se produisent}$

a) Si $\sum_n P(A_n) < \infty$, alors $P(\overline{A}) = 0$

b) Si $\sum_n P(A_n) = \infty$ et les $(A_n)_n$ sont indépendants, alors $P(\overline{A}) = 1$
 (avec proba 1, seul un nombre fini de A_n se produisent)
 (avec proba 1, une infinité de A_n se produisent)

Exemple. Lancer de pièces de monnaie

À chaque lancer on lance une pièce, et si X_n : résultat du n -ème lancer,

$$\text{on a } P(\underbrace{\{X_n = \text{pile}\}}_{A_n}) = p \in]0,1[$$

les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendants, et $\sum_n P(A_n) = \infty$ donc par Borel-Cantelli,

la probabilité qu'une infinité de lancers donnent pile est 1

Si on suppose maintenant que les pièces utilisées pour chaque lancer sont $\neq$,

$$\text{avec } P(\underbrace{\{X_n = \text{pile}\}}_{A_n}) = p_n \in]0,1[\text{ t.g. } \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n < +\infty$$

Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) < +\infty \Rightarrow$ le nombre de lancers qui donnent pile est fini
b.c. avec proba. 1

dém de Borel-Cantelli :

a) Soit $\varepsilon > 0$ $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) < +\infty \Rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $\sum_{k \geq n_\varepsilon} P(A_k) < \varepsilon$

Propriété additive de $P \Rightarrow P\left(\bigcup_{k \geq n_\varepsilon} A_k\right) \leq \sum_{k=n_\varepsilon}^{+\infty} P(A_k) < \varepsilon$

donc si $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$, $(B_n)_n \downarrow$ et $(P(B_n))_{n \geq n_\varepsilon}$ est majorée par ε ,

donc $(P(B_n))_{n \geq 0}$ CV vers $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) < \varepsilon$

Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, et que $\bigcup_{k \geq n} A_k = B_n \downarrow \bar{A}$, on déduit

$$P(\bar{A}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = 0$$

b) Ind de $(A_n)_n \Rightarrow$ ml de $(A_n^c)_n \Rightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \forall \underset{\substack{n \\ \in \mathbb{N}}}{n} \leq N,$

$$P\left(\bigcup_{k=n}^N A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=n}^N A_k^c\right) \stackrel{\text{ml}}{=} 1 - \prod_{k=n}^N P(A_k^c)$$

$$= 1 - \exp\left(\sum_{k=n}^N \ln(P(A_k^c))\right) = 1 - \exp\left(\sum_{k=n}^N \ln(1 - P(A_k))\right).$$

Comme $\forall x \geq 0, \ln(1-x) \leq -x$, et par croissance de $\exp$, on déduit.

$$P\left(\bigcup_{k=n}^N A_k\right) \geq 1 - \exp\left(-\underbrace{\sum_{k=n}^N P(A_k)}_{\substack{\uparrow \\ \text{en } N}}\right) \quad (*)$$

$$\left(\bigcup_{k=n}^N A_k \right)_{N \geq 0} \nearrow \text{donc} \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^N A_k \right) = P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right)$$

et par $(*)$,

$$P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right) \geq 1 - \exp\left(- \underbrace{\sum_{k \geq n} P(A_k)}_{+\infty} \right) = 1$$

i.e.

$$P\left(\underbrace{\bigcup_{k \geq n} A_k}_{B_n} \right) = 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$(B_n)_n \searrow \bar{A} \quad \text{donc} \quad P(\bar{A}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = 1 \quad \blacksquare$$